2ème BAC Pro
Lycée Laymoun

Fonction primitive :

Prof : YAZOUGH MOHAMED

Activité : 1°) on considère trois fcts : F ; G et H tq :

$F(x) = x^2$; $G(x) = x^2 - \sqrt{2}$ et $H(x) = x^2 + \frac{1}{5}$ pour $\forall x \in \mathbb{R}$.

calculer : $F'(x)$; $G'(x)$ et $H'(x)$.

2°) on considère la fct f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x$

2-a) Determiner une fct F tq : $F'(x) = f(x)$

2-b) F est-elle unique ?

2-c) Determiner une fct G tq : $G'(x) = f(x)$ et $G(1) = 0$.

① Déf d'une fct primitive :

Déf f est une fct numérique déf sur un intervalle I.

on appelle fct primitive de f sur l'intervalle I, toute fct F tq :
1/ F est dérivable sur I.
2/ $(\forall x \in I)$; $F'(x) = f(x)$.

Exple : $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$; $I =]0, +\infty[$; $F(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

On a : F dériv sur I et $F'(x) = f(x)$ sur I donc F est une primitive de f sur I.

---

propriétés :

① si F est une primitive de f sur I ; les autres primitives sont de la forme : $x \mapsto F(x) + k$; avec $k \in \mathbb{R}$ constante.

② Toute fct continue sur un intervalle I admet une fct primitive sur I.

③ si F et G sont des primitive de f et g alors : F + G est une primitive de f + g

④ si F est une primitive de f sur I ; pour tout $k \in \mathbb{R}$; $k \times F$ est une primitive de $k \times f$

1 Thm : f déf sur un intervalle I et $x_0 \in I$. supposons que f admet une primitive sur I, alors : pour toute $y_0 \in \mathbb{R}$: il existe une seule primitive F de f sur I tq : $F(x_0) = y_0$

Exple : $I = \mathbb{R}$; $f(x) = x^4 + 2$ $x_0 = 1$; $y_0 = -2$

une primitive de f s'écrit : $F(x) = \frac{x^5}{5} + 2x + k$; $(k \in \mathbb{R})$

on a : $F(x_0) = y_0 = -2 \Rightarrow \frac{1}{5} + 2 + k = -2 \Rightarrow$ $k = -\frac{21}{5}$

② Primitives des fcts usuelles :

la fct f	les fcts primitives de f sur I	I
$x \mapsto k$ $(k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto kx + C$ $(C \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{x^2}{2} + C$ $(C \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ $(C \in \mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + C$; $(C \in \mathbb{R})$	$]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$; $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + C$; $(C \in \mathbb{R})$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + C$; $(C \in \mathbb{R})$	$]0,+\infty[$
$x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$; $(C \in \mathbb{R})$	$]0,+\infty[$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$

③ Fcts primitives et opérations :

f déf sur I	fct primitive sur I	Rqs :
$u' \times u^n$; $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1} \times u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u \neq 0$ sur I
$u' \times u^r$ $(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1}$	$u > 0$ sur I
$u' + v'$	$u + v$	
$uv' + u'v$	uv	
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	$v \neq 0$ sur I